Ministère de l'Education Nationale, de la Recherche et de la Technologie
Ministère de l'Agriculture et de la Pêche

BANQUE D'ÉPREUVES G2E

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES - SESSION 1999

SUJET PRINCIPAL

Durée : 4 heures - Coefficient : 5

Problème n°1

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de coordonnées x, y et z dans l'espace géométrique qui vérifient l'équation

$$(E) \qquad x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz + 2zx - 4xy = 1 \ .$$

1) Etudier l'intersection de $\mathcal{E}$ avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $y + 2z = 0$, en la décrivant complètement.

2) Ecrire l'équation (E) sous la forme

$$^tX.A.X = 1$$

où X désigne le vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et ^tX sa transposée, en explicitant la matrice A.

3) Caractériser le noyau et l'image de l'application linéaire représentée par la matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, en précisant une base de chacun de ces sous-espaces.

4) Déterminer les valeurs propres de A. Pourquoi la matrice A est-elle diagonalisable? Pouvait-on prévoir ce résultat?

5) Diagonaliser A avec une matrice de passage dont les vecteurs colonnes forment une base orthonormale de $\mathbf{R}^3$ (c'est-à-dire soient deux à deux perpendiculaires, de longueur unité pour le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^3$).

6) Comment s'écrit l'équation (E) dans les coordonnées du nouveau repère ainsi construit?

7) Dessiner l'**allure** de l'ensemble $\mathcal{E}$. Que représente l'intersection étudiée en 1)?

Problème n°2

Les questions 1) et 2) d'une part, 3) et 4) d'autre part peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans tout le problème on désigne par $(X_k)_{k\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires* **positives** *sur l'espace* Ω *muni de la probabilité* $\mathbf{P}$, **mutuellement indépendantes** *et* **de même loi.**

On lui associe la nouvelle suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 0}$ *ainsi définie:*

$$S_0 = 0$$

et, pour tout entier positif

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \ .$$

1) Rappeler la définition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et donner un exemple de situation pratique conduisant à considérer une telle loi.

On **rappelle** *(et ce point sera* **admis** *sans démonstration) que la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes X et Y, de densité f et g, est donnée par la densité $f * g$ définie par*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$$

pour x réel.

2) Si la loi commune des variables aléatoires X_k est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, déterminer la loi de la variable aléatoire S_n; bien sûr la démonstration est exigée!

Dans les questions 3) et 4), on suppose que chaque variable aléatoire X_k est discrète, qu'elle prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$ selon la loi uniforme.

3) Calculer la fonction génératrice de chaque variable aléatoire S_n.

4) a) Etant donnée une suite $(a_j)_{j=0}^{j=J}$, montrer que le polynôme en z

$$\sum_{j=0}^{J}(a_j - a_{j-1})z^j$$

où il est convenu que $a_{-1} = 0$, s'écrit encore

$$(1-z)\sum_{j=0}^{J-1} a_j z^j + a_J z^J \ .$$

b) En dérivant le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-z}$, déterminer celui de $\dfrac{1}{(1-z)^{n+1}}$ pour n entier positif, en précisant le rayon de convergence.

c) Utiliser ces résultats pour calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire S_n.

A partir de la question 5) on abandonne les hypothèses sur les X_k faites aux questions 3) et 4).

5) Montrer que, pour tout nombre positif t, et chaque entier positif n

$$\mathbf{P}(S_n \leq t) \leq e^t q^n$$

où q désigne l'espérance de chaque variable aléatoire e^{-X_k}. (On écrira l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\}$ sous la forme $\{\omega \in \Omega \mid e^{-S_n(\omega)} \geq e^{-t}\}$).

6) a) Calculer la valeur de q lorsque la loi commune des X_k est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
b) On suppose que les variables aléatoires X_k sont discrètes, à valeurs dans $\mathbf{N}$, et de loi donnée par

$$\mathbf{P}(X_k = n) = p_n \ .$$

A quelle condition le nombre q correspondant est-il < 1?

A partir de la question 7) on suppose la condition $q < 1$ vérifiée.

7) a) Expliquer l'égalité entre l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $S_n(\omega)$ ait une limite quand $n \to \infty$ et l'ensemble

$$\bigcup_{t \in \mathbf{N}} \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\} \ .$$

b) Montrer que, pour tout nombre positif t, on a

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\} \Big) = 0 \ .$$

c) Quelle conclusion pouvez-vous tirer de ce qui précède?

Pour ω dans Ω tel que la suite $(S_n(\omega))_{n \geq 0}$ tende vers l'infini, et pour t positif donné, on définit le nombre entier positif $\nu_t(\omega)$ par la condition

$$S_{\nu_t(\omega)-1}(\omega) \leq t < S_{\nu_t(\omega)}(\omega)$$

avec la convention $S_{-1}(\omega) = 0$.

8) a) Pour chaque entier n positif ou nul, on désigne par F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire S_n: montrer que pour tout nombre t positif, la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$ converge.
b) Montrer que ν_t est une variable aléatoire dont l'espérance $\mathbf{E}(\nu_t)$ coïncide avec la somme de la série précédente.
9) On suppose que chaque variable aléatoire X_k suit la loi exponentielle de paramètre λ positif: montrer alors que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \mathbf{E}(\nu_t) = \frac{1}{\mathbf{E}(X_k)} \ .$$